國立政治大學 107 學年度 轉學生 招生考試試題

考 試 科 目	81113 微積分一	系 所 別	應用數學系二年級	考試時間	7 月 11 日(星期三)第二節

1. (32 pts) Find the following integrals.

(a) $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$

(b) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

(c) $\int \dfrac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2}dx$

(d) $\int e^x \cos x\,dx$

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.4-34 例 10

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$$

$$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|+c$$

移項後得 $I=\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+c$。

* * *

類 求 $\int\csc^3 xdx=?$ **(經典常考)**

答：令 $I=\int\csc^3 xdx=\int\csc x\csc^2 xdx$

再令 $u=\csc x$， $dv=\csc^2 xdx$

$du=-\csc x\cot xdx$， $v=-\cot x$

$\therefore I=-\csc x\cot x-\int\csc x\cot^2 xdx=-\csc x\cot x-\int(\csc x)(\csc^2 x-1)dx$

$$=-\csc x\cot x-I-\ln|\csc x+\cot x|+c$$

移項後得 $I=-\frac{1}{2}[\csc x\cot x+\ln|\csc x+\cot x|]+c$。

說例 10 公式題	求 $\int e^{ax}\sin bxdx=?$ $\int e^{ax}\cos bxdx=?$ （一箭双鵰型）

[解]

<法一>速解法： 微 積

$$\begin{array}{ccc} e^{ax} & + & \sin bx \\ ae^{ax} & - & -\frac{1}{b}\cos bx \\ a^2e^{ax} & + & -\frac{1}{b^2}\sin bx \end{array}$$

（重複出現原積分函數就停！）

則 $\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx$

移項得 $(1+\frac{a^2}{b^2})\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$

故 $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)+c$

同理可得 $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+c$ 。

<法二>解聯立方程式(慢，萬能)

令 $u=e^{ax}$ ， $dv=\sin bx dx$

$du=ae^{ax}dx$ ， $v=-\frac{1}{b}\cos bx$

$\therefore \int e^{ax}\sin bx dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$

令 $I_1=\int e^{ax}\sin bx dx,\ I_2=\int e^{ax}\cos bx dx$ ，則

$I_1=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}I_2 \qquad \cdots(1)$

再令 $u=e^{ax}$ ， $dv=\cos bx dx$

$du=ae^{ax}dx$ ， $v=\frac{1}{b}\sin bx$

$\therefore \int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx$ ，則

$I_2=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}I_1 \qquad \cdots(2)$

由(1)、(2)二式聯立解得 $\begin{cases} I_1=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)+c \\ I_2=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+c \end{cases}$ 。

<法三>複變數解法(快！)～讀完第七章再來看

由 $e^{ibx}=\cos bx+i\sin bx$

即 $\cos bx=\mathrm{Re}\{e^{ibx}\}$ ～實部

$\sin bx=\mathrm{Im}\{e^{ibx}\}$ ～虛部

$$\begin{aligned}\therefore \int e^{ax}e^{ibx}dx=\int e^{(a+ib)x}dx&=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+c\\ &=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+c\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a-ib)(\cos bx+i\sin bx)+c\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[\left(\underbrace{a\cos bx+b\sin bx}_{\mathrm{Re}}\right)+i\left(\underbrace{a\sin bx-b\cos bx}_{\mathrm{Im}}\right)\right]+c\end{aligned}$$

2. (17 pts) Use the $\epsilon-\delta$ definition of the limit to prove that $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.1-59 例 4

取 $\delta=\delta(\varepsilon)=12\varepsilon$，則當 $\delta=\min\{1,12\varepsilon\}$，必有 $\left|\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$。

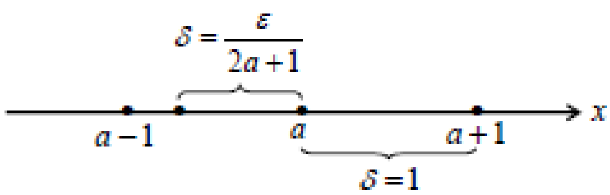
說例 4 數學系	以 ε-δ 程序證明 $\lim_{x\to a} x^2=a^2,\ a\in R$。	(適度放大法)

[解]

(1) 意義：對 $\varepsilon>0$，找到 $\delta>0$，使得當 $0<|x-a|<\delta$ 時，有 $|x^2-a^2|<\varepsilon$

(2)由 $|x^2-a^2|=|(x+a)(x-a)|<\varepsilon$，先令 $a>0$，則 $a<0$ 同理可證！

若限制 $0<|x-a|<1 \Rightarrow -1+a<x<1+a$



取 $x=a+1$ 代入上式得 $|x^2-a^2|=(2a+1)|x-a|<\varepsilon$

取 $\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2a+1}$，則當 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2a+1}\right\}$，必有 $|x^2-a^2|<\varepsilon$。

* * *

$\boxed{類}$ 以 ε-δ 程序證明 $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-3x+5)=6$。

答：意義：對 $\varepsilon>0$，找到 $\delta>0$，使得當 $0<|x-1|<\delta$ 時，有

$$|x^3+3x^2-3x+5-6|<\varepsilon$$

因為 $|x^3+3x^2-3x+5-6|=|x^2+4x+1||x-1|<\varepsilon$

若限制 $0<|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2$

取 $x=2$ 代入上式得 $|x^3+3x^2-3x+5-6|<13|x-1|<\varepsilon$

取 $\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{13}$，則取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{13}\right\}$，有 $|x^3+3x^2-3x+5-6|<\varepsilon$。