1. $\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-x}\right)=?$

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.1-14 例 9

[解]注意負號！令 $x=-t$ 代入得

$$\text{原式}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9(-t)^2+1}}{-t+4}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9t^2+1}}{-t+4}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{4}{t}}=\frac{\sqrt{9}}{-1}=-3\text{。}$$

* * *

類 求 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+7}}{-5x+8}=?$

答：令 $x=-t$ 代入得原式 $=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{16(-t)^2+7}}{5t+8}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{16t^2+7}}{5t+8}=\frac{4}{5}$。

說例 9 注意題	求 $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)=?$ (政大轉)

[解]令 $x=-t$ 代入得

$$\text{原式}=\lim_{t\to\infty}(-t+\sqrt{t^2-2t})=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-2t-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\frac{-2}{1+1}=-1\text{。}$$

* * *

類 求 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+2}+2x\right)=?$

答：令 $x=-t$ 代入得

$$\text{原式}=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-5t+2}-2t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2-5t+2)-4t^2}{\sqrt{4t^2-5t+2}+2t}$$

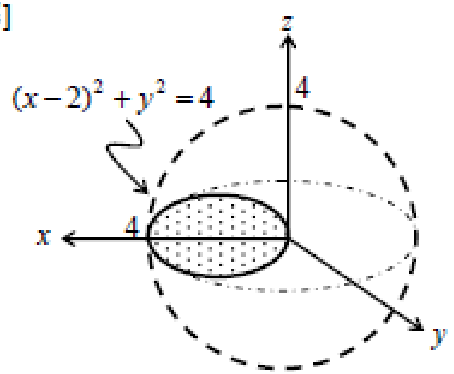
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-5t+2}{\sqrt{4t^2-5t+2}+2t}=-\frac{5}{4}\text{。}$$

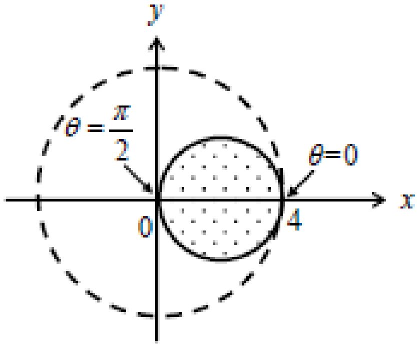
說例 10 觀念題	設 $f(x)=\frac{a\sqrt{x^2+5}-b}{x-2}$，若 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$，且 $\lim_{x\to2}f(x)$ 存在， (1)求 a、$b=?$ (2)求 $\lim_{x\to2}f(x)=?$

8. Find the volume determined by $x^2+y^2+z^2 \le 1$ and $x^2+y^2 \le y$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.9-151 類題

[解]





上視圖

$$V=\iiint_V dzdxdy=\iint_R\int_{z=-\sqrt{16-(x^2+y^2)}}^{z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}}dzdxdy=\iint_{(x-2)^2+y^2\le 2^2}2\sqrt{16-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=4\cos\theta}\sqrt{16-r^2}\,rdrd\theta=2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=4\cos\theta}\sqrt{16-r^2}\,rdrd\theta \text{（依對稱性）}$$

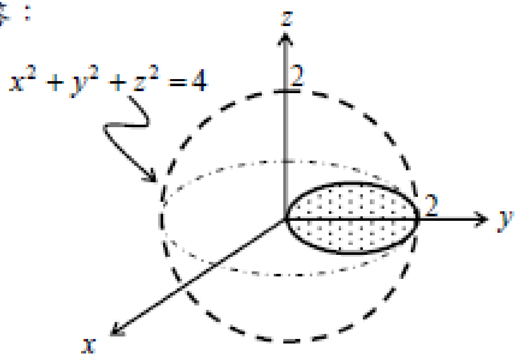
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta=\frac{256}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

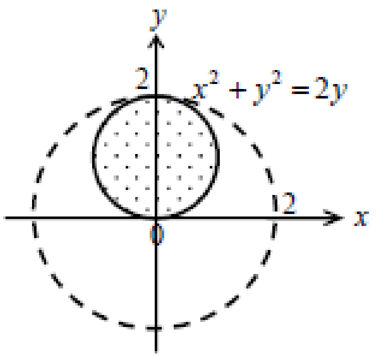
$$=\frac{256}{3}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3\cdot 1}\right]=\frac{256}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

* * *

類 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 被圓柱 $r\le 2\sin\theta$ 切除之体積？(成大轉)

答：





上視圖

$$\therefore V=\iiint_V dzdxdy=\iint_R\int_{z=-\sqrt{4-(x^2+y^2)}}^{z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}}dzdxdy=\iint_{r\le 2\sin\theta}2\sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy$$