臺灣綜合大學系統

107 學年度 學士班
轉學生聯合招生考試

試　　題

類組：A06/A07/A09/A10/A11

科目名稱：微積分 A

科目代碼：E0011

5. (10 Points) Find the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ and evaluate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.7-16 類題

7-16 微積分學習要訣

類 求 $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{3}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots=?$

答：先寫成通式為 $\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$！因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]+\frac{3}{16}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$ 。

說例 4 技巧題	試求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=?$

[解]令 $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$，則 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots$

相減得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，故 $S=2$。

* * *

類 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=?$ (107台綜大、台大、交大研)

答：令 $S=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\cdots$，則 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^4}+\frac{4^2}{2^5}+\cdots$

相減得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots$ $\cdots(a)$

再 $\times\frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{4}S=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$ $\cdots(b)$

$(a)-(b)$ 得 $\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

故 $S=6$。