注意：考試開始鈴響前，不可以翻閱試題

台灣聯合大學系統 107 學年度學士班轉學考試題

考試科目：微積分

組別：A2

參考用

1. Determine the limits of integration where $a \le b$ such that $\int_a^b (x^2 - 16)\,dx$ has minimal value. Answer :________

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.6-9 例 7 之類題

類 求二曲線 $\begin{cases} x+y=0 \\ y^2+3y=x \end{cases}$ 所包圍區域的面積？

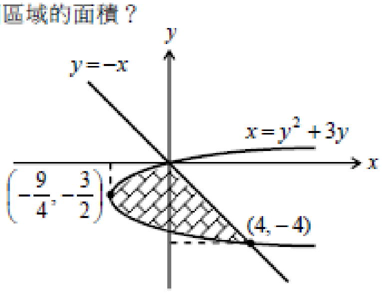
答：求出 $\begin{cases} x+y=0 \\ y^2+3y=x \end{cases}$ 之交點

為 $(4,-4)$, $(0,0)$

並繪圖如右：

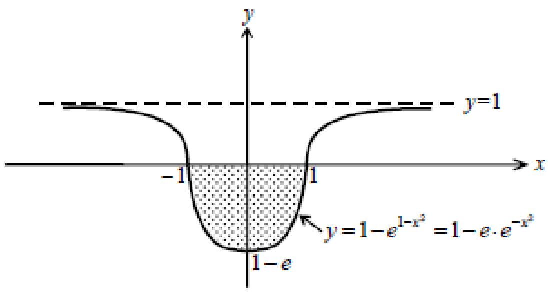
$A=\int_{-4}^{0}\left[-y-(y^2+3y)\right]dy$

$=\frac{32}{3}$。



說例 7 台聯大	有二數 a、b，$a<b$ 使 $\int_a^b (1-e^{1-x^2})dx$ 有最小值，求 $b-a=?$

[解]此類題目是掛羊頭賣狗肉！其實是考繪圖，將 $y=1-e^{1-x^2}$ 繪圖如下：



僅在區間 $[-1,1]$ 內其面積為負，$\therefore a=-1,\ b=1$，故 $b-a=2$。

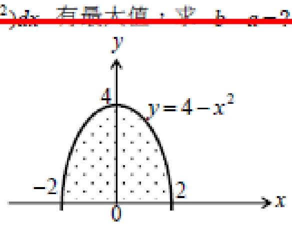
*　　　*　　　*

類 有二數 a，b，且 $a<b$，使 $\int_a^b (4-x^2)dx$ 有最大值，求 $b-a=?$

答：繪 $y=4-x^2$ 之圖形得知

欲得最大面積，由圖形知

$a=-2,\ b=2$，$\therefore b-a=4$。



2. Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin x}\, dx$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.4-19 例 20

$$\text{原式}=\int\sqrt{1-u}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}=2\sqrt{1+u}+c=2\sqrt{1+\cos\theta}+c\text{。}$$

* * *

類 求 $\int\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=?$

答：

<法一>$\text{原式}=\int\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\sqrt{2}\int\cos\frac{\theta}{2}d\theta=2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+c$。

<法二>$u=\cos\theta$，則 $du=\sin\theta\,d\theta\to d\theta=\frac{du}{\sin\theta}=\frac{du}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\text{原式}=\int\sqrt{1+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u}}=-2\sqrt{1-u}+c=-2\sqrt{1-\cos\theta}+c\text{。}$$

說例 20 技巧題	求 $\int\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta=?$

[解]

<法一>$\text{原式}=\int\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int\sqrt{(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2}\,d\theta$

$$=\int(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})d\theta=2(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})+c\text{。}$$

或表為 $\int\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int\sqrt{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}\,d\theta$

$$=\int(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})d\theta=2(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})+c\text{。}$$

<法二>$u=\sin\theta$，則 $du=\cos\theta\,d\theta\to d\theta=\frac{du}{\cos\theta}=\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\text{原式}=\int\sqrt{1-u}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}=2\sqrt{1+u}+c=2\sqrt{1+\sin\theta}+c\text{。}$$

* * *

類 求 $\int\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta=?$

答：