國立臺北大學 109 學年度日間學士班暨進修學士班轉學生招生考試試題

學制系級：經濟學系日間學士班暨進修學士班 2 年級

科　　目：微積分

4. ___(10%)___ Consider the infinite series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^a}$, where $a>0$. Find the necessary and sufficient condition of a such that the series is convergent, or argue that no such condition exists.

命中&相似題目 ： 講義 p.10-28　Exercise3(相似度 100%)

Exercise 3. (對數 p-級數　Logarithmic p-series)

Show that $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收斂, 若\ p>1,\\ 發散, 若\ p\le 1.\end{cases}$

Ans.

令 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p}$, $x\ge 2$. 則顯然的， f 在 $[2,\infty)$ 上連續、遞減且非負的.

$\because$ 若 $p=1$, $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)}\,dx\overset{u=\ln x}{=}\lim_{a\to\infty}\int_e^{a}\frac{1}{u}\,du=\lim_{a\to\infty}(\ln a-\ln e)=\infty$, 發散

若 $p\ne 1$, $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_e^{a}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx\overset{u=\ln x}{=}\lim_{a\to\infty}\int_e^{\ln a}\frac{1}{u^p}\,du=\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{1-p}u^{1-p}\Big|_e^{\ln a}$

$\displaystyle=\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{1-p}\left[(\ln a)^{1-p}-e^{1-p}\right]\begin{cases}收斂, 若\ p>\\ 發散, 若\ p<1\end{cases}$

$\therefore\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx=\begin{cases}收斂, 若\ p>1,\\ 發散, 若\ p\le 1.\end{cases}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收斂, 若\ p>1,\\ 發散, 若\ p\le 1.\end{cases}$　#