國立臺北大學 109 學年度日間學士班暨進修學士班轉學生招生考試試題

學制系級：經濟學系日間學士班暨進修學士班 2 年級

科　　目：微積分

4. __(10%)__ Consider the infinite series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^a}$, where $a>0$. Find the necessary and sufficient condition of a such that the series is convergent, or argue that no such condition exists.

命中&相似題目 ： 講義 p.10-28　Exercise3(相似度 100%)

<u>Exercise 3.</u> (對數 p-級數　Logarithmic p-series)

Show that $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收斂, 若\ p>1,\\ 發散, 若\ p\le 1.\end{cases}$

<u>Ans.</u>

令 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p},\ x\ge 2$. 則顯然的， f 在 $[2,\infty)$ 上連續、遞減且非負的.

$$\because 若\ p=1,\ \int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)}\,dx \overset{u=\ln x}{=} \lim_{a\to\infty}\int_e^{a}\frac{1}{u}\,du=\lim_{a\to\infty}(\ln a-\ln e)=\infty,\ 發散$$

$$若\ p\ne 1,\ \int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_e^{a}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx \overset{u=\ln x}{=} \lim_{a\to\infty}\int_e^{\ln a}\frac{1}{u^p}\,du=\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{1-p}u^{1-p}\Big|_e^{\ln a}$$

$$=\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{1-p}\left[(\ln a)^{1-p}-e^{1-p}\right]\begin{cases}收斂,\ 若\ p>\\ 發散,\ 若\ p<1\end{cases}$$

$$\therefore \int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx=\begin{cases}收斂,\ 若\ p>1,\\ 發散,\ 若\ p\le 1.\end{cases}\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收斂, 若\ p>1,\\ 發散, 若\ p\le 1.\end{cases}$$ #

國立臺北大學 107 學年度日間學士班暨進修學士班轉學生招生考試試題

系　　別：統計學系日間學士班 2、3 年級

科　　目：微積分

3. Let $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $0\le x\le 1$ and $P=\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ be a partition of $[0, 1]$.

(a) (7%) Calculate the upper sum $U(f,p)$ and the lower sum $L(f,p)$ of f over the partition P. Rounded the answers to the third decimal place.

(b) (6%) Approximate $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ by the Simpson's rule with $n=4$ and round to the third decimal place.

(c) (7%) Evaluate $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\right]$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.5-50　第 4 題

<法二>上下同乘 $\frac{1}{n}$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}(\frac{1}{2}\frac{i}{n})^p\frac{1}{n}}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}+\frac{i}{2n})^p\frac{1}{n}}=\frac{\int_0^2(\frac{1}{2}x)^p dx}{\int_0^1(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)^p dx}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2})^p\left[\frac{1}{1+p}x^{p+1}\right]_0^2}{\left[\frac{2}{1+p}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)^{p+1}\right]_0^1}=\frac{(\frac{1}{2})^p\cdot\frac{1}{1+p}2^{p+1}}{\frac{2}{1+p}-\frac{2}{1+p}(\frac{1}{2})^{p+1}}$$

$$=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{p+1}}\text{。}$$

*　　　*　　　*

※精選習作※

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=?$　　2. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{1/n}=?$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)=?$　$p>0$（常考題）

4. $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=?}$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=?$

6. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=?$

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=?$

8. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}=?$

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}\right)=?$

5. Evaluate the following integrals.

(a) (7%) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.4-30 類(2)

4-30 微積分學習要訣

[解]

(1)令 $u = \ln x$，$dv = x dx$

$du = \frac{1}{x} dx$，$v = \frac{1}{2} x^2$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$。

(2)令 $u = \ln x$，$dv = \frac{dx}{x^3}$

$du = \frac{1}{x} dx$，$v = -\frac{1}{2x^2}$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{1}{2x^2} \ln x + \int \frac{1}{2x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + c$。

* * *

類 求 $\int x^3 \ln x dx = ?$ $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = ?$

答：令 $u = \ln x$，$dv = x^3 dx$

$du = \frac{1}{x} dx$，$v = \frac{1}{4} x^4$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{4} x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + c$

同理，令 $u = \ln x$，$dv = \frac{dx}{x^2}$

$du = \frac{1}{x} dx$，$v = -\frac{1}{x}$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$。

但有些題目須經"二次以上"的分部積分步驟才可完成！現將這些題目整理成如下之**速解法**說明之。

說例 5 基本題	求 $\int x^2 e^x dx = ?$

[解]**此類問題有速解法如下**：