臺灣綜合大學系統

107 學年度 學士班

轉學生聯合招生考試

試　　題

類組：D30

科目名稱：心理與教育統計學

科目代碼：D3092

2. $\sum x = 10, \sum x^2 = 5, \sum y = 20, \sum y^2 = 68, \sum xy = 10$, n = 100，計算 Pearson's r 為

A. 0.5　　B. 0.7　　C. -0.56　　D. -0.4　　E. 0.8

命中講義 P.176

2. $\dfrac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N} = \dfrac{CP}{N}$，把 CP 除以 N，稱為「**共變數**」，以 C_{XY} (covariance)表示。

$$r = \frac{\sum Z_X Z_Y}{N} = \frac{\dfrac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{S_X \cdot S_Y}}{N} = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N \cdot S_X \cdot S_Y}$$

$$= \frac{CP}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{C_{XY}}{S_X \cdot S_Y}$$

亦即相關係數 r，為**共變數 C_{XY} 的標準化**，即除以 X 和 Y 的標準差。

二、利用運算公式計算：

由上述公式可知

$$r = \frac{\sum Z_X Z_Y}{N} = \frac{C_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = \frac{CP}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}$$

其中

$$CP = \sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = \sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}$$

$$SS_X = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N} \quad SS_Y = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}$$

所以

$$r = \frac{CP}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}} = \frac{\sum XY - \dfrac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \dfrac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \dfrac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

例子

某學校想研究學生的焦慮分數是否可預測期中考成績，於是隨機抽樣 10 個學生做研究，得到結果如下表：

焦慮分數	50	40	60	40	60	70	60	40	50	30
期中考成績	60	30	70	60	50	90	50	30	20	40

請問這個樣本的皮爾森線性相關係數是多少？(15 分)

3. 測量 18 位中年人身高與腰圍，獲得身高與腰圍的相關係數為 0.3。若以最小誤差平方 (least squared error)方式計算身高預測腰圍的迴歸式(regression equation)，則該迴歸式的決定係數(coefficient of determination)為

A. 0.3　　B. -0.9　　C. 0.09　　D. 0.075　　E. $\sqrt{0.3}$

命中講義 P.185

12-5-3 SS_t，SS_{reg} 及 SS_{res}

由圖可知，$\sum(Y-\overline{Y})^2=\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2+\sum(Y-\hat{Y})^2$

總離均差平方和=廻歸離均差平方和+殘差平方和

(總變異=被解釋變異+非被解釋變異)

$SS_t=SS_{reg}+SS_{res}$ (證明：$SS_{reg}=\dfrac{(CP)^2}{SS_X}$)

12-5-4 決定係數

一、
$$\frac{SS_{reg}}{SS_t}=\frac{\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}=\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2\times\frac{1}{\sum(Y-\overline{Y})^2}$$
$$=\frac{(CP)^2}{SS_X}\times\frac{1}{SS_Y}=\frac{(CP)^2}{SS_XSS_Y}=\left(\frac{CP}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}\right)^2=r^2$$

決定係數 r^2 用以表示：「在效標變項 Y 的總變異中，由預測變項 X 所解釋的變異百分比」。

例如:表 8-1 中，r^2=.6474，表示「在大學聯考成績的總變異中，由高中成績所解釋的變異部份佔 65%」

二、$SS_t=SS_{reg}+SS_{res}$

$$\frac{SS_t}{SS_t}=\frac{SS_{reg}}{SS_t}+\frac{SS_{res}}{SS_t}$$

$1=r^2+1-r^2$

如圖所示，左上角正方形面積 r^2(SS_{reg})，邊長為 r；右上角正方形面積

$1-r^2$ (SS_{res})，邊長為 $\sqrt{1-r^2}$ (底下正方形面積假定為 1 時)

根據「勾股弦定理」，中間直角三角形三邊長關係為：

$(r^2)+(\sqrt{1-r^2})^2=1^2$，其中 $1-r^2$ 稱為「疏離係數」。

10. 接續第 8 題，若統計檢測結果具顯著性(statistically significant)，代表

A. $p < \alpha$　　B. $\beta < \alpha$　　C. $p < \beta$

D. power > 0.95　　E. 可能會有 Type II error

16. 一篇研究報告呈現研究結果為 $F(2,9) = 5.8$，$p = 0.024$；則 p 代表

A. $F(2,9) = 5.8$ 的機率值　　B. $F(2,9) > 5.8$ 及 $F(2,9) < -5.8$ 的機率值

C. Type II error 的機率值　　D. $F(2,9) = 5.8 > F(2,9)$ = critical value 的機率值

E. $F(2,9) > 5.8$ 的機率值

命中講義 P.104

顯著水準(level of significance)

在統計上，推翻或接受 H_0 所根據的標準稱為「顯著水準」。常用：

1. .05 顯著水準(用 α=.05 表示)
2. .01 顯著水準(用 α=.01 表示)

檢定顯著的標準，有三種型式：

1. .05 的顯著水準就是推翻 H_0 時，所犯錯的機率小於 5%。
   .01 的顯著水準就是推翻 H_0 時，所犯錯的機率小於 1%。
2. 1-α 表示信賴係數，α 表示顯著水準，如：
   .95 信賴係數，表示正確率 95%，犯錯率 5%
   .99 信賴係數，表示正確率 99%，犯錯率 1%

3. P 值法(P-value approach)，用於電腦套裝統計軟體，如 SPSS, SAS
   (1) P<.05，表示達顯著水準，推翻 H_0 時，犯錯的機率小於.05
   (2) P<.01，表示達顯著水準，推翻 H_0 時，犯錯的機率小於.05 或.01

9-1-1 單側(尾)檢定與雙側(尾)檢定

以平均數為例，統計假設之寫法，有下列三種：

$$\begin{cases} H_0: \mu_X \le \mu \\ H_1: \mu_X > \mu \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: \mu_X \ge \mu \\ H_1: \mu_X < \mu \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: \mu_X = \mu \\ H_1: \mu_X \ne \mu \end{cases}$$

一、 單側檢定：凡是考驗單一方向性的問題謂之，假設中有「>」或「<」等符號。包括：

1. 右側檢定(right tailed test)(以 α=0.5 說明)

$$\begin{cases} H_0: \mu_X \le \mu \\ H_1: \mu_X > \mu \end{cases}$$

$\because \mu_X - \mu > 0$，為正值，∴轉換的 Z 值為正，故 α 值集中在曲線右端。

2. 左側檢定(left tailed test)

$$\begin{cases} H_0: \mu_X \ge \mu \\ H_1: \mu_X < \mu \end{cases}$$

$\because \mu_X - \mu < 0$，為負值，∴轉換的 Z 值為負，故 α 值集中在曲線左端。

18. 以下哪一方式可能<u>無法</u>提升統計檢定力(power)？

A. 以 r 取代 ϕ　B. 擴增參與者的年齡範圍　C. 增加樣本數　D. 降低 β 值　E. 強化實驗組的反應

命中講義 P.106

1. H_0 為真，接受 H_0：決策正確，其機率為 $1-\alpha$
2. H_0 為真，拒絕 H_0：稱為「第一類型錯誤」(type I error)，其機率為 α。
3. H_0 為假(H_1 為真)，接受 H_1：稱為「第二類型錯誤」(type II error)，其機率為 β。
4. H_0 為假(H_1 為真)，拒絕 H_1：決策正確，其機率為 $1-\beta$，稱為「檢定力」或「統計考驗力」(power of test)

二、α 與 β 的關係

1. α 和 β 相互關聯，其中一個機率變大(小)，則另一個機率隨之變小(大)，例如: $\alpha\nearrow$ vs. $\beta\searrow$；$\alpha\searrow$ vs. $\beta\nearrow$。
2. 增加一本數 n，因抽樣分配集中會使 α 和 β 值同時減少，例如 $\overline{X}$ 的抽樣分配 n↑則 $\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\searrow$。
3. $\boxed{\alpha+\beta\text{ 不一定等於 }1}$。
4. 拒絕 H_0 時，若臨界值向 H_1 的平均數接近(右移)，則 $\beta\nearrow(\alpha\searrow)$；反之，若臨界值向 H_1 的平均數遠離(左移)，則 $\beta\searrow(\alpha\nearrow)$。

三、α 與 β 大小的選擇

α 減小，此時 β 增加，而且 $1-\beta$(統計考驗力)也隨之變小，因此犯那一型錯誤較嚴重，要是研究者所重視的目的而定。例如:

1. 在開發新藥品中，犯型 I 錯誤較嚴重，因為讓較差的藥品上市比未讓優良的藥品上市所犯的錯誤更嚴重，其他心理與教育的研究亦是如此。
2. 在「訊號偵測理論」中，得知「雷達兵」犯型 II 錯誤較嚴重(雷達顯示敵機來襲，卻未加以發現)；反之『飛彈官』犯型 I 錯誤較嚴重(敵機未出現，卻發射飛彈)。

四、增加 $1-\beta$(統計考驗力)的方法:

1. 增加 α。
2. 母群的變異數 σ_X^2 變小。
3. 增加樣本數 n，則 $\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ 變小。
4. H_0 和 H_1 的平均值差異變大(可以用來計算效果量，進而推估 Power)。

19. 依據中央極限定理(central limit theorem)，當樣本數(n)越大

A. 樣本分數的變異數 $=\sigma^2/n$　　B. 樣本平均值可能是常態分布(normal distribution)

C. 樣本分數一定為常態分布　　D. 母群須是常態分布

E. 以上答案皆正確

命中講義 P.76

c. 抽樣分配(sampling distribution)

(1) 定義

從母群體中，理論上抽出某種統計量($\overline{X}$, t)無限多次，所形成的次數分配，例如：$\overline{X}$ 抽樣分配，t 抽樣分配。

(2) 功用

推論母群時的參考依據，應用於下列二種情境

1.區間估計時

必須根據抽樣分配的「信賴水準」與「標準誤」，來推估母數所在的範圍。

2.假設檢定時：

必須根據抽樣分配的「顯著水準」與「臨界值」，以作為拒絕或接受 H_0 時的參考。

※樣本分配(sample distribution)

樣本的某種特質(量數)，與相對應次數所形成的次數分配。

d. 中央極限定理(Central limit theorem, CLT)以 $\overline{X}$ 分配為例

自平均數 μ，標準差為 σ 的母群中隨機抽取樣本大小為 n(n>30)的一組樣本 $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$，並求其平均數，稱為樣本平均數 $\overline{X}$，如此重複無限多次，即可得到無限多個 $\overline{X}$，則此無限多個 $\overline{X}$ 所形成的分配就稱為「$\overline{X}$ 分配」。該分配為常態分配，期望值(或平均數)為 $\mu(E(\overline{X})=\mu)$，變異數為 $\frac{\sigma_x^2}{n}(V(\overline{X})=\frac{\sigma_x^2}{n})$，開根號為 $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ 即標準誤。抽樣分配形成所依據的理論稱為「中央極限定理」。

※$\overline{X}$ 分配的特性

1. $\overline{X}$ 的抽樣分配，不論樣本多少，均以母群平均數 μ 為中心。
2. 樣本 n 數目增加，則 $\overline{X}$ 之標準誤愈小，亦即 $\overline{X}$ 分配愈集中於母群平均數 μ。
3. 樣本 n 愈大時，$\overline{X}$ 分配愈對稱，n>30 時，$\overline{X}$ 分配將近常態分配，亦即合乎「中央極限定理」。
4. $\overline{X}$ 分配的平均數為 μ，標準誤為 $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$。

21. 將原始分數轉換成 z 分數，以下敘述何者為真？

A. z 分數為常態分布

B. z 分數為單峰(unimodal)分布

C. z 分數的總和為 1

D. z 分數的標準差為 1

E. 以上答案皆對

21.Z 分數　命中講義 P.46&47

一、Z 分數:

1. $Z=\frac{X-\overline{X}}{S}$，可立即看出某一原始分數在平均數之上或之下多少個標準差的位置，而且可比較具有不同單位的分數。

特性：

(1) Z 分數之平均數 0，標準差 1，變異數亦為 1。

證明：$[1]\overline{Z}=\frac{\sum Z}{N}=\frac{\sum(X-\overline{X})}{S\cdot N}=\frac{0}{S\cdot N}=0$

$$[2]S_Z^2=\frac{\sum(Z-\overline{Z})^2}{N}=\frac{\sum Z^2}{N}=\frac{\sum(X-\overline{X})^2}{S^2\cdot N}=\frac{S^2}{S^2}=1$$

(2) Z 分數事實上對原始分數作直線轉換，Z= a X+b 而 $a=\frac{1}{s},b=-\frac{\overline{X}}{S}$。

例如：

	甲 原分數	乙 原分數	總平均	總標準差	甲 Z 分數	乙 Z 分數
國文	71	80	62	9	1.00	2.00
英文	34	24	38	7	-0.57	-2.00
數學	39	26	25	5	2.80	0.20
歷史	72	64	60	8	1.50	0.50
地理	61	91	71	10	-1.00	2.00
加總分數	277	285			3.72	2.70

由上圖可知甲生與乙生假若要比較其總分高低，基本上是不能由原始分數作比較，所以必須依賴標準分數，整體來說，乙生雖然原始加總分數比甲生高，但是經過標準分數計算後可以發現，乙生標準分數表現比甲生差。

二、Z 分數的直線轉換(直線標準分數):

因為 Z 分數有負值和小數點，在運算上上不方便，因此須加以直線轉換公式：其他標準分數= az+b

名稱	轉換公式	平均數	標準差	備註
T 分數	T=10Z+50	50	10	
WISC	WISC=15Z+100	100	15	魏氏兒童智力量表分數
BSS	BSS=16Z+100	100	16	比西量表分數

III.常態化標準分數(非直線轉換):

將分數轉換為直線標準分數，目的在使不同測驗分數可以比較，但是當兩個分數的分配明顯不同時，如一個常態，一個偏態，就無法加以比較，因此必須將原始分數都轉換為常態分配的標準分數，才可以在常態分配曲線下加以比較，此分數稱為「常態化標準分數」。

1. T 量表分數：
   McCall 於 1922 年創用，與 T 分數一樣 $T=50+10Z$，但是 T 量表分數，經過「常態化」，一定是常態分配，目前 T 量表分數是使用最普遍的常態化標準分數。
2. 標準九(stanine)、Sten 分數、C 量表分數：不常考

標準分數的轉換方式與名稱:

1、 直線轉換(linear transformation)，則稱為『直線標準分數』(linear standard score)

不管原始分配形狀為何，做過直線轉換後，分配形狀不會改變，例如：原始分數是常態分配，經直線轉換後，仍為常態分配；若是非常態分配則經直線轉換後，仍為非常態分配，因此其相對位置是不變的，像是 Z 分數。

2、 非直線轉換(nonlinear transformation)，則稱為「常態化標準分數」(normalized standard score)

不管原始分配為何，做過非直線轉換後，其分配形狀會成為常態分配，例如原始分配為非常態分配，則必須轉換為常態分配(稱常態化)，它是一種非直線的轉換過程，因為分數之間的相對位置已經改變了，像是百分等級。