考試科目	微積分	系所別	財政學系二年級	考試時間	7月8日(三)第4節

1. (10 points)Find the inverse function of f. $(x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{3}{2})$

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

命中&相似題目 ： 講義 p.0-17 Ex6 (b) (相似度 90%)

Ex 6.

Let $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

(a) Show that f is an 1-1 function. (b) Find a formula of the inverse of f.

Solution.

(a) 設 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1-x_1}{1+x_1} = \dfrac{1-x_2}{1+x_2} \Rightarrow (1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)$

$$\Rightarrow 1 + x_2 - x_1 - x_1x_2 = 1 + x_1 - x_2 - x_2x_1$$

$$\Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$ 為 1-1 函數. (所以， f 有反函數)

(b) 利用上面的（I）之關係式及合成函數的概念 ：

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow \frac{1-f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)} = x \Rightarrow 1 - f^{-1}(x) = x + x f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$ ■

2. (10 points)Find the derivative of the function $y = \sqrt{x}ex^2(x^2+1)^{10}$.

命中&相似題目 ： 講義 p.3-56 Exercise3 (相似度 100%)

註 ： 原題目可能有誤, 正確版本應是 $y = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}$

出處為 Calculus (Metric Version) 8E by James Stewart 的 p.446 #62,
魏老師講義 p.3-56 Exercise 3.

Exercise 3.

Find y' if $y = \sqrt{x}e^{x^2}\left(x^2+1\right)^{10}$.

Ans.

$$\ln y=\ln\left[\sqrt{x}e^{x^2}\left(x^2+1\right)^{10}\right]=\frac{1}{2}\ln x+x^2+10\ln\left(x^2+1\right)$$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+2x+10\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{1}{2x}+2x+\frac{20x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow y'=y\left(\frac{1}{2x}+2x+\frac{20x}{x^2+1}\right)=\sqrt{x}e^{x^2}\left(x^2+1\right)^{10}\left(\frac{1}{2x}+2x+\frac{20x}{x^2+1}\right).\quad \#$$

國立政治大學 109 學年度 轉學生 招生考試試題

第 1 頁，共 1 頁

考試科目	微積分	系所別	資訊科學系 二年級	考試時間	7月8日(三) 第二節

1. (20%) Please evaluate each of the following limits if it exists:

(a) (5%) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan x-\sin x}{x\cos x}$

(b) (5%) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-x^2\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x}$

(c) (5%) $\lim\limits_{n\to 0^+}x^x$

(d) (5%) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}$

命中&相似題目 ： 講義 p.4-21 Exercise6 (相似度 95%)

Exercise 6.

Calculate $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}$.

Ans.

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}}\overset{LH}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}}=e^{-2\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/2}}=e^0=1\ .\quad \#$$

2. (20%) Please evaluate each of the following integrals:

(a) (5%) $\int_0^\infty \int_x^\infty e^{-y}\,dy\,dx$

(b) (5%) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

(c) (5%) $\int \sec^2 x\,(1+e^{\tan x})\,dx$

(d) (5%) $\iint_D \tan^{-1}(\frac{y}{x})\,dx\,dy$, where D is the region bounded by $0 \le x^2+y^2 \le 2$ and $0 \le y \le x$.

命中&相似題目：

(b)講義 p.6-49 Exercise9 (相似度 100%)

<u>Exercise 9.</u>

(a) Evaluate $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ for $n = 0,\ 1,\ 2,$ and 3.

(b) Guess the value of $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ when n is an arbitrary positive integer.

(c) Prove your guess in part (b) by using mathematical induction.

<u>Ans.</u>

(a) $n=0: \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 0+1 = 1.$

$n=1: \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-xe^{-x}-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b}-e^{-b}+1\right) \overset{LH}{=} 0-0+1 = 1.$

$n=2: \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x})\Big|_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-b^2e^{-b}-2be^{-b}-2e^{-b}+2\right) \overset{LH}{=} 0-0-0+2 = 2.$

$n=3: \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-x^3e^{-x}-3x^2e^{-x}-6xe^{-x}-6e^{-x})\Big|_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-b^3e^{-b}-3b^2e^{-b}-6be^{-b}-6e^{-b}+6\right) = 6.$ #

(d) 講義 p.12-27 Homework12 #20 (相似度 100%)

20. Evaluate $\iint_R \arctan(y/x)\,dA$, where $R = \{(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$.

6. (15%) Please evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. (Hint: consider evaluating $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$)

命中&相似題目 ： 講義 p.12-15 Ex13 (相似度 100%)

Ex13. (高斯積分)

Show that $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution.

Remark.

(1) $\because e^{-x^2}$ 為偶函數 $\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

(2) 高斯積分在許多領域都有應用，其扮演非常重要的角色，積分方法及結果務必當常識記起來。

7. (15%) Please find the area under one arc of the cycloid having parametric equations: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

命中&相似題目 ： 講義 p.8-4 Ex3 (d) (相似度 100%)

Ex 3.

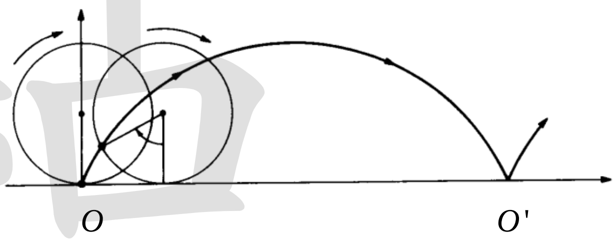
The **cycloid** is the locus of a point on the rim of a circle of radius a rolling along a straight line (see the figure).

(a) Find a parametrization of the cycloid.

(b) Find the tangent to the cycloid at the point where $t = \pi/3$.

(c) Find the arc length OO'.

(d) Find the area under one arch of the cycloid.



Solution. (a) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ (b) $y - \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}\left(x - \dfrac{a\pi}{3} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $8a$ (d) $3\pi a^2$

國立政治大學 109 學年度 轉學生 招生考試試題

第一頁，共一頁

考 試 科 目	微積分(一)	系 所 別	應用數學系 二年級	考 試 時 間	7 月 8 日(三) 第二節

4. (15%) Show that $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

命中&相似題目 ： 講義 p.3-50 定理(2) (相似度 100%)

定理. (自然指數函數與自然對數函數的導函數)

(1) $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},\ \forall x > 0$.

(2) $\frac{d}{dx}e^x = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Proof.

(1) $$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

(2) [方法 1]： $$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{\left[(1+h)^{1/h}\right]^h-1}{h} = e^x.$$

[方法 2]： 令 $y=e^x \Rightarrow \ln y = x \overset{d/dx}{\Rightarrow} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y = e^x$. ■

國立政治大學 109 學年度 轉學生 招生考試試題

第 1 頁，共 1 頁

考 試 科 目	微積分	系 所 別	資訊科學系 二年級	考 試 時 間	7 月 8 日(三) 第二節

5. (15%) Show that if the limit exists, then it is unique.

命中&相似題目 ： 講義 p.1-41 Homework1.3 #5 (相似度 100%)

Homework 1.3

5. If $\lim_{x\to a} f(x)=L$ and $\lim_{x\to a} f(x)=M$, prove that $L=M$.

(即, 若一函數極限存在, 則其極限值必唯一)

6. (10%) Show that if $f'(x)>0$ on an interval, then f is increasing on that interval.

命中&相似題目 ： 講義 p.4-29 定理 (相似度 100%)

定理. (一階導數決定遞增、遞減性)

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且在 (a,b) 內可微。

(1) 若 $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,b)$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 內嚴格遞增。

(2) 若 $f'(x)<0,\ \forall x\in(a,b)$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 內嚴格遞減。

Proof.

任意給定兩點 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且滿足 $x_1<x_2$，則 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上連續且在 (x_1,x_2) 內可微。由均值定理知，$\exists c\in(a,b)$ s.t.

(1) $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\overset{\because f'(x)>0}{>}0\Rightarrow f(x_2)>f(x_1).$

$\therefore$ $f(x)$ 在 (a,b) 內嚴格遞增。

(2) $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\overset{\because f'(x)<0}{<}0\Rightarrow f(x_2)<f(x_1).$

$\therefore$ $f(x)$ 在 (a,b) 內嚴格遞減。 ■

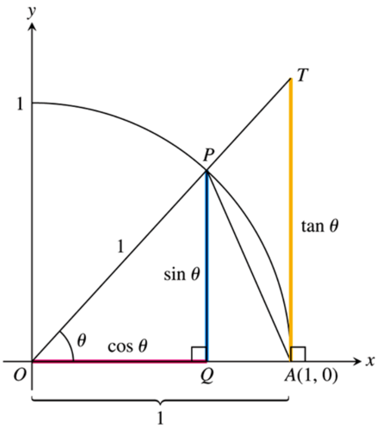
7. (10%) Show that $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$.

命中&相似題目 ： 講義 p.1-18 定理 (相似度 100%)

定理.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\ .$$

Proof



如右圖，在第一象限作單位圓，有 $\overline{OA}=\overline{OP}=1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

$\because \Delta OPQ<\measuredangle OPA<\Delta OTA\Rightarrow \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$

$\overset{\cdot\frac{2}{\sin\theta}}{\Rightarrow}\cos\theta<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}\overset{\text{取倒數}}{\Rightarrow}\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$.

$\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\cos\theta}=1$ $\therefore$ 由夾擠定理知, $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$.

此外， $\because \frac{\sin\theta}{\theta}$ 為偶函數 $\therefore \lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\Rightarrow\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$ ■

國立政治大學 109 學年度 轉學生 招生考試試題

第一頁，共一頁

考試科目	微積分(二)	系所別	應用數學系 二年級	考試時間	7月8日(三) 第四節

4. (10%) Find the total length of the curve $r=2(1+\cos\theta)$.

命中&相似題目 ： 講義 p.8-23 Exercise10 (相似度 100%)

Exercise 10.

Find the exact length of the polar curve $r=2(1+\cos\theta)$.

Ans.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1+\cos)^2+4\sin^2\theta}\ d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4+8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{8+8\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\sqrt{16}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\cdot 2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=16.\quad \#$$

8. (10%) Evaluate the integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

命中&相似題目 ： 講義 p.12-16 Ex14 (a) (相似度 99%)

Ex 14.

Evaluate

(a) $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (b) $\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$ (c) $\int_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$

Solution. (a) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (c) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

國立政治大學 107 學年度 轉學生 招生考試試題

考 試 科 目	81113 微積分一	系 所 別	應用數學系 二年級	考試時間	7 月 11 日(星期三)第二節

1. (32 pts) Find the following integrals.

(a) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(b) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

(c) $\int \dfrac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2}dx$

(d) $\int e^x \cos x dx$

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.4-34 例 10

$=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$

$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|+c$

移項後得 $I=\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+c$。

* * *

類 求 $\int\csc^3 xdx=?$ **(經典常考)**

答：令 $I=\int\csc^3 xdx=\int\csc x\csc^2 xdx$

再令 $u=\csc x$， $dv=\csc^2 xdx$

$du=-\csc x\cot xdx$， $v=-\cot x$

$\therefore I=-\csc x\cot x-\int\csc x\cot^2 xdx=-\csc x\cot x-\int(\csc x)(\csc^2 x-1)dx$

$=-\csc x\cot x-I-\ln|\csc x+\cot x|+c$

移項後得 $I=-\frac{1}{2}[\csc x\cot x+\ln|\csc x+\cot x|]+c$。

說例 10 公式題	求 $\int e^{ax}\sin bxdx=?$ $\int e^{ax}\cos bxdx=?$ （一箭双鵰型）

[解]

<法一>速解法：

微		積
e^{ax}	$+$	$\sin bx$
ae^{ax}	$-$	$-\frac{1}{b}\cos bx$
a^2e^{ax}	$+$	$-\frac{1}{b^2}\sin bx$

（重複出現原積分函數就停！）

則 $\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx$

移項得 $(1+\frac{a^2}{b^2})\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$

故 $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)+c$

同理可得 $\int e^{ax}\cos bx dx=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+c$。

<法二>解聯立方程式(慢，萬能)

令 $u=e^{ax}$ ， $dv=\sin bx dx$

$du=ae^{ax}dx$ ， $v=-\dfrac{1}{b}\cos bx$

$\therefore \int e^{ax}\sin bx dx=-\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\dfrac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$

令 $I_1=\int e^{ax}\sin bx dx,\ I_2=\int e^{ax}\cos bx dx$，則

$I_1=-\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\dfrac{a}{b}I_2 \qquad \cdots(1)$

再令 $u=e^{ax}$ ， $dv=\cos bx dx$

$du=ae^{ax}dx$ ， $v=\dfrac{1}{b}\sin bx$

$\therefore \int e^{ax}\cos bx dx=\dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\dfrac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx$，則

$I_2=\dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\dfrac{a}{b}I_1 \qquad \cdots(2)$

由(1)、(2)二式聯立解得 $\begin{cases} I_1=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)+c \\ I_2=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+c \end{cases}$。

<法三>複變數解法(快！)～讀完第七章再來看

由 $e^{ibx}=\cos bx+i\sin bx$

即 $\cos bx=\mathrm{Re}\{e^{ibx}\}$ ～實部

$\sin bx=\mathrm{Im}\{e^{ibx}\}$ ～虛部

$$\begin{aligned}\therefore \int e^{ax}e^{ibx}dx=\int e^{(a+ib)x}dx&=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+c\\ &=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+c\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a-ib)(\cos bx+i\sin bx)+c\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[\left(\underbrace{a\cos bx+b\sin bx}_{\mathrm{Re}}\right)+i\left(\underbrace{a\sin bx-b\cos bx}_{\mathrm{Im}}\right)\right]+c\end{aligned}$$

2. (17 pts) Use the $\epsilon - \delta$ definition of the limit to prove that $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.1-59 例 4

第一章 極限 *1-59*

取 $\delta = \delta(\varepsilon) = 12\varepsilon$，則當 $\delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$，必有 $\left|\frac{x-1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$。

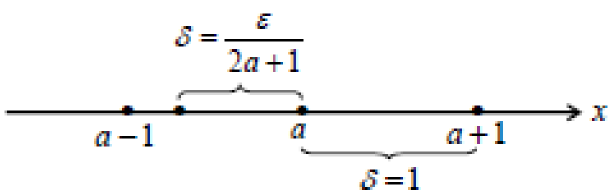
說例 4 數學系	以 ε-δ 程序證明 $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, $a \in R$。	(適度放大法)

[解]

(1) 意義：對 $\varepsilon > 0$，找到 $\delta > 0$，使得當 $0 < |x-a| < \delta$ 時，有 $|x^2 - a^2| < \varepsilon$

(2)由 $|x^2 - a^2| = |(x+a)(x-a)| < \varepsilon$，先令 $a > 0$，則 $a < 0$ 同理可證！

若限制 $0 < |x-a| < 1 \Rightarrow -1 + a < x < 1 + a$



取 $x = a+1$ 代入上式得 $|x^2 - a^2| = (2a+1)|x-a| < \varepsilon$

取 $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2a+1}$，則當 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2a+1}\right\}$，必有 $|x^2 - a^2| < \varepsilon$。

*　　　*　　　*

類 以 ε-δ 程序證明 $\lim_{x\to 1}(x^3 + 3x^2 - 3x + 5) = 6$。

答：意義：對 $\varepsilon > 0$，找到 $\delta > 0$，使得當 $0 < |x-1| < \delta$ 時，有

$$|x^3 + 3x^2 - 3x + 5 - 6| < \varepsilon$$

因為 $|x^3 + 3x^2 - 3x + 5 - 6| = |x^2 + 4x + 1||x-1| < \varepsilon$

若限制 $0 < |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

取 $x = 2$ 代入上式得 $|x^3 + 3x^2 - 3x + 5 - 6| < 13|x-1| < \varepsilon$

取 $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{13}$，則取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{13}\right\}$，有 $|x^3 + 3x^2 - 3x + 5 - 6| < \varepsilon$。