臺灣綜合大學系統 109 學年度學士班轉學生聯合招生考試試題

科目名稱	微積分A	類組代碼	共同考科
		科目碼	E0011

※本項考試依簡章規定所有考科均「不可」使用計算機。　　本科試題共計 2 頁

答題時，請詳述計算過程，否則將不予計分。

1. (10 pts) Evaluate the following limits if they exist.

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2}$

命中&相似題目 ： 講義 p.1-19 Ex17(a) & Remark (4).　(相似度 95%)

Ex 17.

Evaluate the limit if it exists.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$　(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$　(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$　(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{\sin 2x}$

Solution. (a) 0　(b) $\frac{7}{4}$　(c) $\frac{6}{5}$　(d) 3

Remark.

以下極限式可當作常識記起來，當遇到填充題或較複雜的極限計算時可直接使用 :.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$;　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$;

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$;　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

7. (10 pts) Let S be the surface defined by the equation

$$x\cos(xy)+z^2y^4-7xz=1$$

and $P(0,1,1)$ be a point on S. Find an equation that defines the tangent plane to S at P and

命中&相似題目 ： 講義 p.11-18 Ex15 & p.11-24 Exercise 3　(相似度 80%)

Ex 15.

Find the equations of the tangent plane and normal line at the point $(-2,1,-3)$ to the ellipsoid

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3.$$

Solution. $3x-6y+2z=-18,\quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2/3}$

Exercise 3.
曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在 $(0,1,-1)$ 處的切平面方程為
(A) $x-y+z=-2$ (B) $x+y+z=0$ (C) $x-2y+z=-3$ (D) $x-y-z=0$

Ans.

令 $f(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x.\Rightarrow \nabla f(0,1,-1)=(1,-1,1)$
$\therefore$ 切平面方程為 $x-y+z=-2$ 選 (A). #

8. (10 pts) Evaluate the double integral

$$\iint_R (y-x)\,dA$$

where $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$.

命中&相似題目 ： 講義 p.12-12 Ex9 & p.12-27 Homework 12 (相似度 80%)

Ex 9.
Evaluate $\iint_R (3x+4y^2)\,dA$, where R is the region in the upper half-plane bounded by the circles $x^2+y^2=1$ and $x^2+y^2=4$.

Solution. $\frac{15}{2}\pi$

20. Evaluate $\iint_R \arctan(y/x)\,dA$, where $R=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, 0\le y\le x\}$.

臺灣綜合大學系統 109 學年度學士班轉學生聯合招生考試試題

科目名稱	微積分 B	類組代碼	共同考科
		科目碼	E0012

1. (10 points) Find the following limits.

(a)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-7}.$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{4}{x}}.$$

命中&相似題目 ： 講義 p.1-23 Ex21(a) (相似度 90%)

Ex 21.

Evaluate

(a) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$ (b) $\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$ (c) $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{1/x^2}$ <107. 政大應數轉>

Solution. (a) e^{-2} (b) e^{a-b} (c) e^{-2}

8. (10 points) Find $(f^{-1})'(5)$ for

$$f(x)=x^5+2x^3+2x.$$

命中&相似題目 ： 講義 p.3-47 Ex23 (相似度 90%)

Ex 23.

(a) If $f(x)=3x^3+4x^2+6x+5$, find $(f^{-1})'(5)$.

(b) If $f(x)=3+x^2+\tan(\pi x/2)$, $-1<x<1$, find $(f^{-1})'(3)$.

Solution. (a) $\dfrac{1}{7}$ (b) $\dfrac{7}{6}$

臺灣綜合大學系統109學年度學士班轉學生聯合招生考試試題

科目名稱	微積分C	類組代碼	共同考科
		科目碼	E0013

1. (10 points) Find the following limits:

(a) (5 points) $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^x-1}{x}$

(b) (5 points) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

命中&相似題目 ： 講義 p.1-15 Ex13() (相似度 100%)

Ex 13.

Evaluate (a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$ (b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

Solution. (a) $\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{-1}{2}$

6. (10 points) Consider the power series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$. Find its maximal domain of convergence.

命中&相似題目 ： 講義 p.10-42 Ex19 (相似度 99%)

Ex 19.

Find the radius of convergence and interval of convergence of the series $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

Solution. $(-1/3,1/3]$

8. (10 points) Find the absolute maximum of $f(x,y)=e^{-xy}$ on the region $x^2+4y^2\le 1$.

命中&相似題目 ： 講義 p.11-34 Exercise7 (相似度 95%)

Exercise 7.

Find the extreme values of f on the region $f(x,y)=e^{-xy}$, $2x^2+y^2\le 4$.

Ans.

$\begin{cases} f_x=-ye^{-xy}=0 \\ f_y=-xe^{-xy}=0 \end{cases}\Rightarrow (x,y)=(0,0)$ 為臨界點且在限制區域 $2x^2+y^2\le 4$ 內.

考慮 $F(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda(2x^2+y^2-4)$, 並令

$$\begin{cases} F_x=-ye^{-xy}+4\lambda x=0 \\ F_y=-xe^{-xy}+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=2x^2+y^2-4=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{ye^{-xy}}{4x} \\ \lambda=\frac{xe^{-xy}}{2y} \\ 2x^2+y^2-4=0\cdots\cdots(*) \end{cases}$$

則 $\frac{ye^{-xy}}{4x}=\frac{xe^{-xy}}{2y}\Rightarrow 4x^2=2y^2\Rightarrow 2x^2=y^2$ 代入 (*) 得

$2x^2+2x^2-4=0\Rightarrow x=\pm1,\ y=\pm1$.

$f(0,0)=1,\ f(1,1)=f(-1,-1)=e^{-1},\ f(-1,1)=f(1,-1)=e$.

$\therefore$ 最大值為 e, 最小值為 e^{-1}. #

臺灣綜合大學系統

107 學年度 學士班
轉學生聯合招生考試

試　　題

類組：A06/A07/A09/A10/A11

科目名稱：微積分 A

科目代碼：E0011

5. (10 Points) Find the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ and evaluate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

命中&相似題目：微積分學習要訣 P.7-16 類題

7-16 微積分學習要訣

類 求 $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{5\cdot7\cdot9}+\cdots=?$

答：先寫成通式為 $\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ ！因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]+\frac{3}{16}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$ 。

說例 4 技巧題	試求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=?$

[解]令 $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$，則 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots$

相減得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，故 $S=2$。

*　　　*　　　*

類 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=?$ (107台綜大、台大、交大研)

答：令 $S=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\cdots$，則 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^4}+\frac{4^2}{2^5}+\cdots$

相減得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots$ $\cdots(a)$

再 $\times\frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{4}S=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$ $\cdots(b)$

$(a)-(b)$ 得 $\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

故 $S=6$。